



SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA,
ARHITEKTURE I GEODEZIJE

UNIVERSITY OF SPLIT
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING,
ARCHITECTURE AND GEODESY

KVALIFIKACIJSKI DOKTORSKI ISPIT

Matej Šodan

**Stohastička identifikacija parametara
korištenjem modela za raspucavanje**

Split, listopad 2023.

MATICE HRVATSKE 15
21000 SPLIT - HRVATSKA /
CROATIA
www.gradst.hr

T: +385 (0)21 303 333
F: +385 (0)21 465 117
E: info@gradst.hr

IBAN:
HR37240700011005
OIB: 83615500218



**DOKTORSKI
STUDIJ**
VISOKE RAZINE
KVALITETE

1 Uvod

Kvazi-krhki materijali spadaju među najzastupljenije materijale u građevinskoj industriji s primjerima kao što su beton, mort, opeka, keramika stijene i čvrsti čelici. U svrhu daljnjeg napretka sigurnosti i optimizacije njihovog korištenja, nužno je nastaviti istraživanja ponašanja materijala i njihovih slomova. Fokus daljnjeg rada bi trebao biti na razvoju efikasnih numeričkih modela koji precizno simuliraju složene procese unutar materijala uz razvitak metodologije stohastičkih analiza kako bi se moglo precizno identificirati njihove materijalne parametre i smanjiti nepouzdanosti.

Naime, slom kvazi-krhkih materijala proizlazi iz složene strukture koja uključuje razne konstituente, različitih dimenzija i materijalnih svojstava koji su često popraćeni i unutarnjim defektima. Navedena struktura značajno utječe na mehanizme pucanja materijala kroz pojavu lokalnih koncentracija naprezanja i početnih mjesta inicijacija pukotina. Slom nastaje uslijed razvoja mikropukotina koje se postupno šire i spajaju, propagirajući kroz najslabije dijelove materijala sve do formiranja makropukotina i konačnog sloma. Pod djelovanjem opterećenja, nastajanje i širenje pukotina nastaje pojedinačno ili kombinirano kroz lokalne slomove u vlaku, posmiku i tlaku. Takvi procesi predstavljaju zahtjevan zadatak u vidu uspješnog simuliranja ponašanja i sloma materijala. Povodom toga su razvijeni mnogi sofisticirani numerički modeli temeljeni na diskretizaciji materijala u vidu kontinuuma i diskontinuuma. Zadatak svakog od tih modela je što preciznije obuhvatiti sva stanja naprezanja u materijalu, utvrditi mjesta nastajanja pukotina i simulirati njihovu daljnju propagaciju. Za opis složenog nelinearnog ponašanja materijala uslijed pucanja se koriste razni konstitutivni modeli ponašanja. Takvi modeli zahtijevaju mnoge ulazne parametre poput elastičnih i lomnih, koji služe za opisivanje procesa unutar materijala. Vrijednosti tih parametara direktno utječu na inicijaciju i karakter nastalih pukotina unutar materijala te samim time i na samo rješenje numeričkih modela [1]–[3].

Zbog doze nesigurnosti u vezi s usvajanjem njihovih vrijednosti, odabir parametara modela za preciznu i realnu simulaciju stvarnih konstrukcija predstavlja značajan izazov. Svaki numerički model nosi određenu mjeru nepouzdanosti u rješenju zbog nužnih aproksimacija koje se odnose na proračune, modeliranje strukture i ponašanja materijala, mehanizme formiranja pukotina i tako dalje. Također, dostupno znanje o parametrima konstrukcije koji bi trebali poslužiti u modelu često nije pouzdano zbog moguće degradacije materijala. Jedno od mogućih rješenja navedene problematike leži u povezivanju stohastičkih i građevinskih metoda i metodologija i njihovom zajedničkom daljenjem razvoju. Naime, stohastički pristup omogućuje identifikaciju parametara na temelju relativno jednostavnih destruktivnih i nedestruktivnih mjerenja na konstrukcijama. Ove metode omogućavaju identifikaciju više parametara istodobno, kombinirajući prethodna nepouzdana znanja s novim mjerenjima, temeljeći se na Bayesovom teoremu uvjetne vjerojatnosti. Na takav način se omogućuje jednostavnije utvrđivanje mehaničkih parametara konstrukcije i kalibracija numeričkih modela na temelju dobivenih mjerenja što osigurava povećanu preciznost i pouzdanost simulacija [4]–[6].

2 Pregled polja istraživanja

2.1 Numerički model materijala

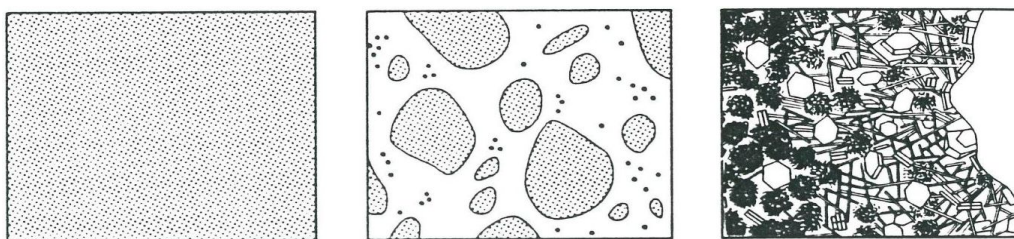
Kako bi se numerički uspješno simuliralo ponašanje materijala, mnogo toga mora biti uzeto u obzir. Od karakteristike strukture, vrste analiziranog problema do odabira pogodnih numeričkih i materijalnih modela, najčešće balansirajući

između računalnih kapaciteta i tražene preciznosti [1], [7]. U poglavlju 2.1. su prezentirani detalji osnovnih koraka numeričkog modeliranja materijala kako bi se opisalo i simuliralo ponašanja kvazi-krhkih materijala.

2.1.1 Modeliranje kvazi-krhkih materijala

Kvazi-krhki materijali predstavljaju heterogene materijale sastavljene od više konstituenata koje značajno utječu na njihovo mehaničko ponašanje i procese sloma. Na primjeru betona, heterogenost materijala kroz različite konstituente, njihove dimenzije i materijalne karakteristike, značajno utječe na raspodjelu naprezanja, što direktno utječe na formiranje i širenje pukotina. Stoga, razumijevanje i modeliranje heterogenosti unutar kvazi-krhkih materijala se ne smije zanemariti kako bi se ostvarilo precizno ponašanje i rezultati sloma [8]–[11].

Ipak, prilikom modeliranja kvazi-krhkih materijala valja uzeti u obzir postojeće računalne ograničenosti. Odluka o odabiru odgovarajuće razine modeliranja temelji se na faktorima poput dimenzija konstrukcije i prirode analiziranog problema. Pri simuliranju mehaničkog ponašanja materijala, primjenjuju se tri različite razine modeliranja: makro razina, mezo razina i mikro razina (slika 1.)



Slika 1: Prikaz modeliranja kvazi-krhkih materijala: makro, mezo i mikro razina [12]

Makromodeliranje predstavlja jednostavan pristup modeliranju materijala koji zahtijeva minimalne računalne resurse. Ovaj pristup se temelji na dodjeljivanju uniformnih materijalnih karakteristika svakoj točki materijala, pretpostavljajući homogenost i zanemarujući utjecaj heterogene strukture te njenog utjecaja na procese sloma. Ovaj pristup često nalazi primjenu u ispitivanju konstrukcija većih dimenzija, gdje bi detaljnija analiza zahtijevala znatne računalne resurse. Također, makromodeliranje se često koristi i u situacijama gdje se očekuje pojava i lokalizacija jedinstvene makropukotine, kao što je slučaj kod testiranja savijanja u tri i četiri točke [13]–[16].

Mezo i mikro modeliranje predstavljaju pristupe koji uzimaju u obzir detaljniju strukturu materijala, opisujući komponente kroz dimenzije, raspored i materijalne karakteristike. Ovo omogućuje simuliranje međusobnog utjecaja konstituenata na globalno ponašanje materijala, uključujući raspodjelu naprezanja i pojavu pukotina. Na primjer, u mezo modeliranju beton se promatra kao kombinacija tri do četiri različita konstituenta: agregata, cementne paste, prijelaznih zona između agregata i cementne paste te pora. Mikromodeliranje ide korak dalje, pružajući još detaljniji uvid u strukturu materijala, razbijajući svaku komponentu na još manje dijelove poput kapilarnih pora, zrna pijeska, kristala itd. Navedene metode modeliranja omogućavaju precizno simuliranje svih procesa koji se događaju unutar materijala kroz utjecaj i interakciju komponenti, te ostvaruju fizikalno najtočnije rezultate sloma. Međutim, zbog složenosti takvih pristupa, zahtijevaju znatne računalne resurse, što ograničava primjenu ovakvih pristupa na manje konstrukcije i konstruktivne detalje [8]–[10], [17]–[19].

2.1.2 Numerički modeli

Efikasna simulacija ponašanja i loma kvazi-krhkih materijala zahtijeva sofisticiran pristup kako bi se adekvatno opisali svi uvjeti koji proizlaze iz opterećenja, oštećenja i sloma strukture. Kao što je već istaknuto, slom ovih materijala proizlazi iz pojave niza mikropukotina na različitim lokacijama i unutar različitih konstituenata, koje pod utjecajem rasta opterećenja propagiraju i spajaju se. Za učinkovitu simulaciju ovog problema, neophodni su učinkoviti numerički modeli. U literaturi se susreće mnogo takvih modela, često klasificiranih u dva osnovna pristupa - kontinuumski i diskontinuumski [2], [20].

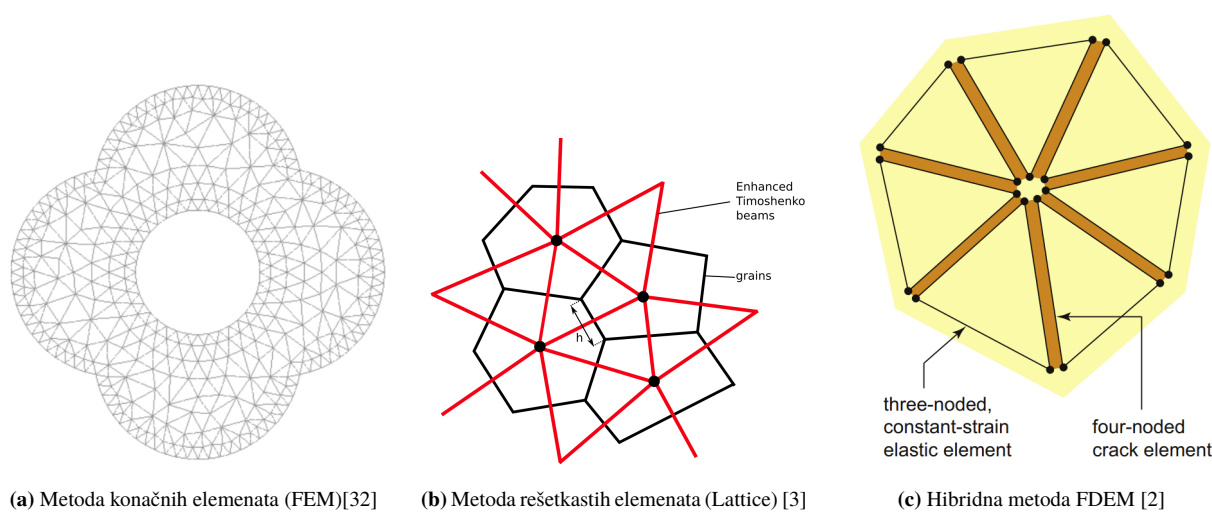
Modeli kontinuuma temelje se na kontinuiranosti prostorne domene kako bi se osigurala neprekinutost između različitih točaka. Jedna od najistaknutijih i često primjenjivanih tehnika unutar kontinuumskih modela je metoda konačnih elemenata (FEM) [2], [20]. Osnovna ideja FEM metode uključuje diskretizaciju materijalne domene na skup konačnih elemenata, unutar kojih se provode lokalni izračuni. Spajanjem krutosti svakog pojedinačnog elementa formira se globalna matrica krutosti, a izračunom globalnog vektora reziduala konstruira se globalni sustav jednadžbi. Rješavanjem ovog sustava dobivaju se globalne vrijednosti tražene funkcije (najčešće pomaka) u svim čvorovima elemenata domene. Pomoću vrijednosti u čvorovima, putem odabranih interpolacijskih funkcija, provode se aproksimacije za sve ostale proizvoljno odabrane točke unutar elemenata. Međutim, klasični pristupi metode konačnih elemenata zahtijevaju sustavnu diskretizaciju domene kako bi opisali nastanak novih pukotina unutar elemenata. Nadalje, takvi pristupi često donose subjektivne rezultate u vezi s omekšavanjem i lomom materijala, budući da dobiveni rezultati ovise o dimenzijama korištenih elemenata. Naime, dimenzija samog konačnog elementa utječe na dimenziju lokalizirane zone, što dalje utječe na disipaciju energije i globalni odgovor modela [20]–[23]. U skladu s navedenim nedostacima, razvijeni su poboljšani modeli FEM-a, poput metode konačnih elemenata s ugrađenim diskontinuitetima (ED-FEM) i proširene metode konačnih elemenata (X-FEM), koje ne zahtijevaju ponovnu diskretizaciju domene i pružaju rezultate neovisne o veličini konačnih elemenata [24]. Oba pristupa temelje se na obogaćivanju konačnih elemenata funkcijama koje opisuju diskontinuitete kako bi uspješno modelirali slom materijala. X-FEM obogaćuje polje pomaka elemenata globalno na čvorovima i time opisuje parametre stvaranja pukotina [25]. Međutim, ovakav pristup ne omogućuje kondenzaciju ukupne matrice krutosti te za uspješnu simulaciju propagacije pukotina je potrebno postići njihovu neprekinutost. U slučaju ED-FEM-a, opis stvaranja pukotina postiže se obogaćivanjem polja pomaka na lokalnoj razini elemenata [26], [27]. Ovakav pristup omogućuje formiranje kondenziranih matrica krutosti elemenata i ne zahtijeva uvjete neprekinutosti pukotina, što omogućava izbjegavanje složenih algoritama praćenja širenja pukotina.

S druge strane, modeli diskontinuiteta pristupaju materijalu kao skupu diskretnih elemenata koji ostvaruju pomake, rotacije, razdvajanje i međusobne interakcije. Prvotni razvoj diskontinuumskih modela bio je usmjeren na simulaciju materijala koji se inherentno smatraju diskontinuiranim, poput stijena i praškastih materijala. Najčešće korištena metoda u tom smislu je metoda diskretnih elemenata (DEM), koja simulira kontakt i gibanje čestica putem izračuna interakcijskih sila i momenata za svaki pojedini element [2], [20]. Daljnjim razvojem modela i inkorporacijom kohezivnih veza između elemenata omogućeno je i simuliranje kontinuiranih materijala koji ostvaruju diskontinuitete pod utjecajem opterećenja [3]. Naime, uslijed povećanja naprezanja i prekoračenja vrijednosti kohezivnih veza, te veze se raspadaju ili se kroz metodu ugrađenih diskontinuitet omekšavaju. Ovaj pristup omogućuje modelima diskontinuiteta da simuliraju pucanje raznovrsnih kvazi-krhkih materijala. Među često korištenim modelima u literaturi ističu se rešetkasti (Lattice) modeli [3], [18], [28]–[30]. Ova metoda predstavlja materijal kao skup diskretnih jednodimenzionalnih elemenata i Voronoi ćelija, čime se čuva međusobna povezanost elemenata od samog početka simulacije. Simulacija sloma materijala ostvaruje se

putem izračuna kohezijskih sila i provjere puknuća materijala. Inkorporacija diskontinuiteta omogućuje manifestaciju omekšavanja materijala i postizanje rezultata neovisnih o gustoći mreže konačnih elemenata.

Osim navedena dva pristupa, u literaturi se pojavljuje i hibridna skupina modela koja kombinira oba pristupa modeliranja, poznata kao kombinirana metoda kontinuuma i diskontinuuma (FDEM) [2], [16], [31]. Ova metoda simulira materijal kao kontinuiranog sve do pojave pukotina, nakon čega pukotine nastaju i šire se kroz ugrađene kontaktne elemente među kontinuum elementima. Pojava pukotina omogućuje razdvajanje materijala nakon čega je omogućeno i ostvarivanje značajnih pomaka, rotacija i međusobni kontakti elemenata.

Na slici 2. su prikazani neki od prethodno spomenutih numeričkih modela iz domene kontinuuma, diskontinuuma i hibridnih pristupa.



Slika 2: Kontinuum, diskontinuum i hibridni numerički modeli

2.1.3 Konstitutivni modeli ponašanja materijala

Tijekom procesa opterećenja materijala, naprezanja se postupno povećavaju. Kada vrijednost naprezanja premaši graničnu vrijednost materijala, započinje proces nastajanja pukotina, što dalje dovodi do nelinearnih efekata. Nelinearno ponašanje kvazi-krhkih materijala uslijed pojave pukotina obično se opisuje kroz dva temeljna konstitutivna modela: modela oštećenja i modela plastičnosti [1], [7], [33].

Model oštećenja predstavlja koncept mehaničkog ponašanja materijala u kojem se svako dodatno opterećenje, nakon stvaranja pukotine, manifestira kao povećanje razine trajnog oštećenja. Ovaj model se najčešće primjenjuje na materijale kao što su beton, keramika i staklo. Pojava nepovratnog oštećenja manifestira se smanjenjem krutosti, što se očituje kroz procese rasterećenja i ponovnog opterećenja materijala. Funkcija koja određuje pojavu pukotina i stupanj oštećenja se naziva funkcija sloma. Pozitivna vrijednost ove funkcije ukazuje na pojavu pukotine ili procesa daljnjeg oštećenja nad tom istom pukotinom, dok negativna vrijednost označava da se materijal nalazi unutar elastičnog područja ili da je u fazi rasterećenja. U jednadžbi (1) je prikazan primjer funkcije sloma modela oštećenja materijala:

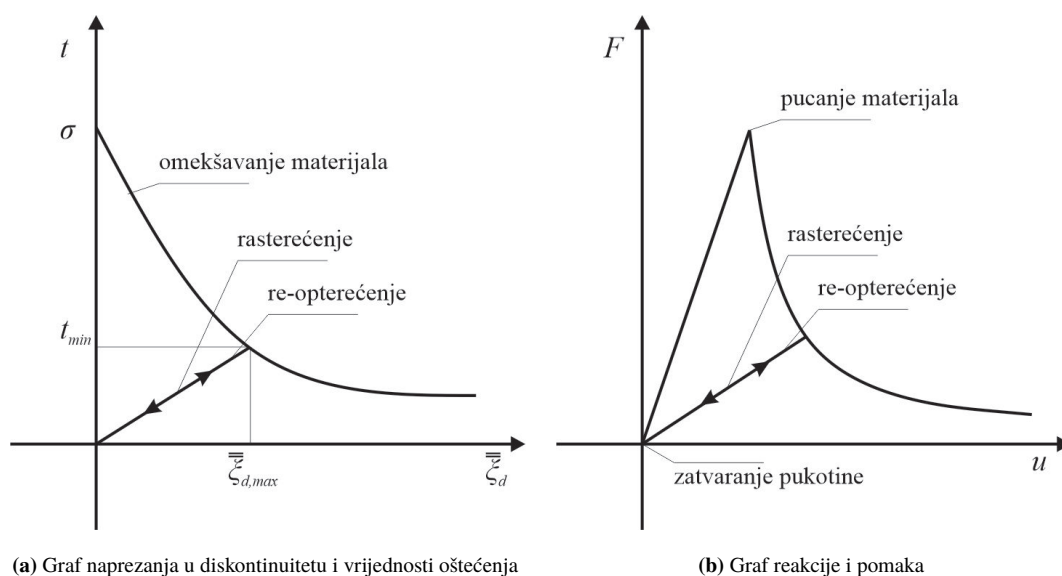
$$\bar{\phi}_d(t, \bar{q}_d) = t - (\sigma - \bar{q}_d) \leq 0, \quad (1)$$

gdje simbol t označava naprezanje u diskontinuitetu, σ je granična vrijednost naprezanja materijala, a \bar{q}_d predstavlja oda-

branu funkciju koja opisuje oštećenje materijala. Funkcija oštećenja materijala se bira proizvoljno, a u nastavku je prikazana jedna eksponencijalna formulacija:

$$\bar{q}_d = \sigma \left(1 - \exp \left[-\frac{\sigma}{G_f} \bar{\xi}_d \right] \right). \quad (2)$$

Ovdje G_f predstavlja energiju loma koja je potrebna za potpuno otvaranje pukotine, dok simbol $\bar{\xi}_d$ označava lokalnu varijablu elementa koja predstavlja stupanj trajnog oštećenja materijala. Slika 3. prikazuje graf ovisnosti između naprezanja u diskontinuitetu i vrijednosti oštećenja materijala, zajedno s grafom reakcije i pomaka za jedan uzorak za korišteni konstitutivni model oštećenja materijala. Na slici 3a. je vidljivo da uslijed porasta naprezanja u diskontinuitetu preko granične



Slika 3: Konstitutivni model oštećenja

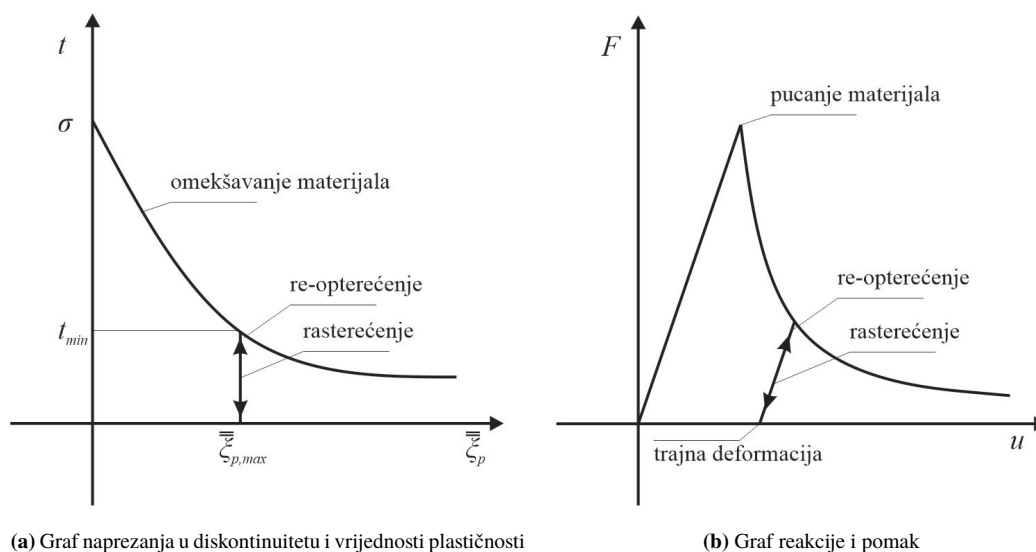
vrijednosti naprezanja materijala σ dolazi do procesa omekšavanja. Taj proces odgovara nastanku pukotine i oštećenja materijala, vidljiv kroz pad vrijednosti naprezanja u diskontinuitetu t i postupnog povećavanja vrijednosti varijable $\bar{\xi}_d$. Sama krivulja prikazuje eksponencijalni karakter što odgovara odabranoj formulaciji \bar{q}_d . Slika 3b. prikazuje isti proces kroz prikaz vrijednosti sile reakcije i pomaka. Nakon pucanja materijala slijedi nagli pad vrijednosti reakcije uslijed nastajanja pukotine i disipacije energije. Proces rasterećenja i ponovnog opterećenja materijala prati smanjenje krutosti zbog akumuliranog trajnog oštećenja, vidljivo kroz blaži nagib krivulje. Također, uslijed potpunog rasterećenja materijala ostvaruje se i potpuno zatvaranje pukotine.

Što se tiče modela plastičnosti, slični mehanizmi su na snazi s razlikom da umjesto trajnog oštećenja, materijal zadržava trajne plastične deformacije. To znači da materijal ima konstantnu i nepromijenjenu krutost kroz sve cikluse opterećenja i rasterećenja, ali nakon što naprezanje premaši granične vrijednosti materijala, javljaju se trajne i nepovratne plastične deformacije koje sprječavaju povratak materijala u prvobitno stanje. Ovaj obrazac ponašanja tipičan je za većinu metala, ali se može primijeniti i na druge kategorije materijala. Funkcija sloma za model plastičnosti ima isti oblik kao u jednadžbi (1), s tim da se koristi funkcija \bar{q}_p koja opisuje plastično tečenje materijala:

$$\bar{q}_p = \sigma \left(1 - \exp \left[-\frac{\sigma}{G_f} \bar{\xi}_p \right] \right), \quad (3)$$

pri čemu $\bar{\xi}_p$ predstavlja vrijednost trajne plastične deformacije. Slika 4. prikazuje graf ovisnosti između naprezanja u diskontinuitetu i vrijednosti trajne deformacije materijala, zajedno s grafom sile reakcije i pomaka za jedan uzorak, koristeći

konstitutivni model plastičnosti materijala. Na slici 4a. su vidljivi slični mehanizmi kao i u primjeru modela oštećenja.



Slika 4: Konstitutivni model plastičnosti

Proces omekšavanja materijala prati postupni pad vrijednosti napreznja u diskontinuitetu t i povećanje vrijednosti plastičnih deformacija $\bar{\xi}_p$. Uslijed procesa rasterećenja i ponovnog opterećenja materijala, ostvarene vrijednosti plastičnih deformacija zaostaju unutar materijala. Takav utjecaj je prisutan i na slici 4b. na kojoj je vidljiva nemogućnost zatvaranja pukotine, ali i očuvanje krutosti materijala uslijed procesa rasterećenja i re-opterećenja.

2.2 Identifikacija parametara modela

Rezultati svakog numeričkog modela direktno ovise o vrijednostima ulaznih materijalnih parametara koji opisuju ponašanje i mehanizme sloma materijala. Izravno određivanje tih vrijednosti za stvarne konstrukcije često predstavlja zahtjevan zadatak koji nije uvijek izvediv. Raspoloživa alternativa za rješavanje ovog problema je moguća kroz stohastičke pristupe [5], [34]–[36]. U poglavlju 2.2. su prezentirani detalji Bayesove inverzne metode i pripadajuće metodologije koja omogućava kalibraciju numeričkih modela prema stvarnim sustavima na temelju prikupljenih mjerenja, čak i ako ta mjerenja nisu izravno povezana s parametrima koji se identificiraju.

2.2.1 Bayesova inverzna metoda

Razvoj sofisticiranih i preciznih numeričkih modela sam po sebi ne garantira uspješno simuliranje ponašanja konstrukcija. U modeliranju materijala uvijek postoji određena razina nesigurnosti u rješenjima zbog nužnih aproksimacija povezanih s načinom proračuna, razinom detaljnosti u opisu materijala ili modeliranjem nelinearnog ponašanja kroz pojednostavljene konstitutivne zakone. Nadalje, preciznost takvih modela u mnogočemu ovisi o izboru ulaznim mehaničkih parametara koje modeli koriste kako bi se opisali procesi unutar materijala. Iako određen količina informacija o parametrima može biti dostupna, njihova vrijednost povlači sa sobom određene nepouzdanosti. Naime, zbog različitih utjecaja na materijal koji proizlaze iz eksploatacije i degradacije tijekom vremena, ovi parametri ne moraju uvijek odražavati trenutno stanje materijala. U većini slučajeva, jedini precizni način za određivanje točnih mehaničkih parametara su destruktivni tes-

tovi. Ovi testovi, iako imaju mogućnost preciznog utvrđivanja vrijednosti parametara najčešće su skupi, te ostavljaju trajna oštećenja na objektima. Zbog svega navedenog, nužno je razvijati i primjenjivati alternativne metode za identifikaciju parametara i kalibraciju numeričkih modela prema stvarnih konstrukcija putem jednostavnijih mjerenja na konstrukcijama. Ovim pristupom je moguće daljnje smanjiti nepouzdanost simulacija za ponašanje konstrukcija na što manju moguću mjeru [4]–[6].

Jedna od često primjenjivanih metoda u procesu kalibracije modela i identifikacije parametara je Bayesova inverzna metoda. Ova statistička metoda se pokazala kao učinkovit alat za precizno određivanje različitih nepouzdanih parametara [5], [35], [37]. Temelji se na traženju više mogućih rješenja kroz njihovu distribuciju, a ne samo jednog determinističkog rješenja te na takav način uključuje i prikaz nepouzdanosti samoga rješenja. Ključna značajka Bayesove inverzne metode je njezina sposobnost prilagodbe početnih spoznaja o distribuciji parametara putem raznih mjerenja povezanih s konstrukcijom. Važno je napomenuti da ta mjerenja ne moraju nužno biti izravno povezana s parametrima koji se žele identificirati, što omogućava i korištenje jednostavnih i često nedestruktivnih pristupa pri identifikaciji parametara. Putem tako prikupljenih mjerenja se ažurira pretpostavljeno znanje o parametrima kroz postupno oblikovanje distribucije traženog rješenja. Konačni rezultat ovog procesa predstavlja poboljšanu procjenu parametara numeričkog modela koja je kalibrirana prema stvarnim odgovorima konstrukcije. Bayesova inverzna metoda se temelji na Bayesovom teoremu uvjetne vjerojatnosti [6]:

$$\pi(z)^d = \frac{L(z)\pi(z)}{\int L(z)\pi(z) dz}. \quad (4)$$

Izraz $\pi(z)$ predstavlja "prior" početnu distribuciju vrijednosti parametara modela z , koja se odabire proizvoljno na temelju iskustva ili određenih pretpostavki prije uzimanja u obzir bilo kakvih mjerenja. Za početnu distribuciju često se koriste normalna ili ravnomjerna distribucija, pri čemu su granične vrijednosti postavljene "daleko" kako bi s visokom sigurnošću obuhvatile stvarne vrijednosti parametara.

Funkcija $L(z)$ predstavlja funkciju vjerojatnosti koja izražava vjerojatnost postizanja vrijednosti mjerenja d s obzirom na vrijednost parametara modela z . Definiranje funkcije vjerojatnosti često se temelji na pretpostavci postojanja distribucije pogreške u mjerenjima ϵ , koja je neovisna varijabla u odnosu na parametre z . Jedno ostvareno mjerenje tada se može zapisati kao:

$$d_i = u_i + \epsilon_i = G(z_i) + \epsilon_i, \quad (5)$$

gdje je u_i točna vrijednost jednog mjerenja, ϵ_i jedna vrijednost pogreške mjerenja temeljena na funkciji vjerojatnosti π_ϵ , a G je model koji opisuje vezu između varijable z i točnih mjerenja u . Funkcija vjerojatnosti $L(z)$ je definirana kao:

$$L(z) = \prod_{i=1}^n \pi_{\epsilon_i}(d_i - u_i(z)). \quad (6)$$

Odabir vrste funkcije se obično temelji na pretpostavkama o prirodi pogreške u mjerenjima i specifičnostima problema. Neki od korištenih tipova uključuju normalnu, log-normalnu i eksponencijalnu distribuciju.

Izraz $\pi(z)^d$ predstavlja "posterior" distribucija vrijednosti parametara z . Ona predstavlja ažuriranu spoznaju o distribuciji parametara temeljenu na vrijednostima dobivenim iz mjerenja d . Najčešće "posterior" i "prior" distribucije nisu konjugirane. Također obično "posterior" distribucija ne prati poznate modele distribucije te nije u eksplicitno zatvorenoj formi, što analitički proračun čini jako skupim ili nemogućim. Zbog toga su razvijene mnoge matematičke metode, poznate kao metode aproksimacije rješenja, koje aproksimiraju oblike "posterior" distribucija.

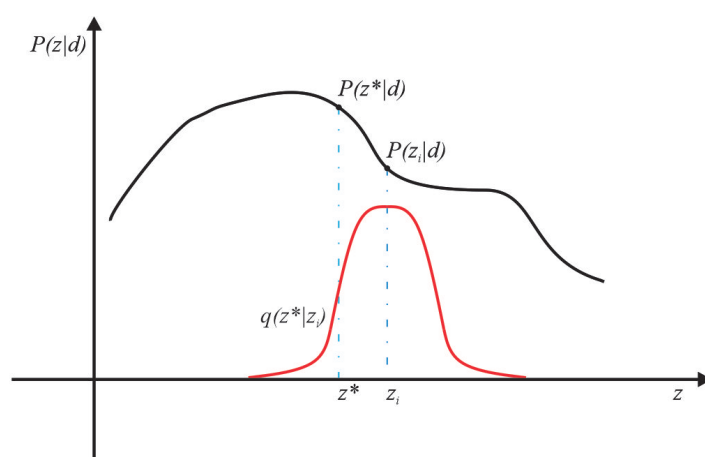
2.2.2 Metode aproksimacije rješenja

Metode za aproksimaciju rješenja predstavljaju pristupe koji, putem statističke analize temeljene na većem broju generiranih rješenja, aproksimiraju "posterior" distribuciju traženih vrijednosti parametara. Kroz pregled literature [6], [38] kao najčešće korištene metode za ovu svrhu se ističu metoda Monte Carlo Markov lanac (MCMC) i Kalman filter metoda.

Metoda Monte Carlo Markov lanac robusna je statistička metoda koja se u kontekstu inženjerskih problema koristi i u statičkim i dinamičkim problemima. Ova metoda se temelji na prikupljanju velikog broja rješenja koje koristi kako bi aproksimirala "posterior" distribuciju traženih vrijednosti. Monte Carlo Markov lanac (MCMC) kombinira dvije tehnike u jednoj metodi: Monte Carlo simulacije i metodu Markovljevih lanaca [6], [39], [40]. Osnovna ideja inverznog procesa ove metode leži u slučajnom odabiru vrijednosti z_{i+1} iz "prior" distribucije, gdje je taj odabir ovisan o prethodno utvrđenoj vrijednosti z_i , i prihvaća se ili odbija kao dio "posterior" distribucije na temelju vjerojatnosti $T(z_{i+1} \rightarrow z_i)$. Metropolis-Hastings algoritam je najopćenitiji algoritam za rješavanje MCMC postupka. Konkretno, ovaj algoritam nasumično odabire kandidate z^* unutar Markovog lanca i prihvaća ih kao dio "posterior" distribucije na temelju kriterija predložene distribucije $q(z^*|z_i)$. Distribucija $q(z^*|z_i)$ je obično strogo pozitivna, relativno mala i jednostavna, često simetrična distribucija vrijednosti oko trenutno odabrane vrijednosti z_i iz "posterior" distribucije. Odluka o prihvaćanju novog kandidata ovisi o vrijednosti izračunatog parametra prihvaćanja α , koji se računa na sljedeći način [39]:

$$\alpha = \min \left(1, \frac{P(z^*|d)}{P(z_i|d)} \right). \quad (7)$$

U jednadžbi (7), $P(z^*|d)$ predstavlja izračunatu "posterior" vrijednost za z^* , dok $P(z_i|d)$ označava "posterior" vrijednost za trenutno odabranu vrijednost z_i . Ako je parametar α veći od 1, to znači da se parametar z^* nalazi u području veće vjerojatnosti, te se prihvaća kao nova vrijednost ažurirane distribucije. U slučaju kada je α manji od 1, tada se nasumično bira vrijednost r iz ravnomjerne distribucije $U[0, 1]$. Ako je $\alpha \geq r$, kandidat se prihvaća; u suprotnom, odbija se, a postupak se ponavlja s novom vrijednošću kandidata z^* [39]. Slika 5. prikazuje jedan korak Metropolis-Hastings algoritma za prikupljanje rješenja. Brzina i broj koraka potrebnih za uspješnu identifikaciju "posterior" distribucije ovisi o njezinoj

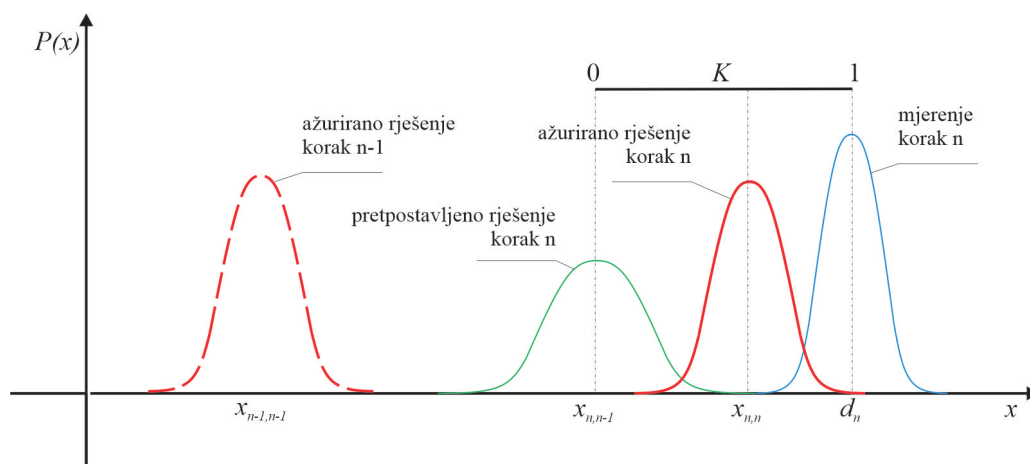


Slika 5: Metropolis-Hastings algoritam: prikaz postupka odabira kandidatske vrijednosti z^* .

složenosti i obliku. Također, ključan je odabir predložene distribucije $q(z^*|z_i)$. Odabirom uskog oblika generiraju se mali koraci između vrijednosti u Markovom lancu, što dovodi do sporijeg procesa identifikacije. S druge strane, odabirom

širokog oblika postoji rizik od prihvaćanja mnogih rješenja koja ne pripadaju traženoj "posterior" distribuciji, što rezultira nepreciznom aproksimacijom rješenja. Iako efikasno korištenje metode zahtijeva iskustvo u odabiru distribucija, MCMC metoda je sposobna uspješno aproksimirati nelinearne i kompleksne distribucije, što je čini korisnom za širok spektar problema.

Metoda Kalmanovog filtera predstavlja tehniku za procjenu sekvencijalnih stanja linearnih dinamičkih sustava u diskretnom vremenu, temeljenu na nepouzdanim mjerenjima. Ova metoda radi rekurzivno, što znači da se tijekom svakog novog mjerenja obavlja nova procjena stanja sustava. Ključna prednost ovog pristupa leži u činjenici da za procjenu koristi samo podatke iz prethodnog koraka, čime se izbjegava potreba za pohranjivanjem i obradom svih prethodno dobivenih podataka [41]. Osnovna Kalman filter metoda omogućuje procjenu stanja sustava kad je posterior distribucija Gaussova, određena srednjom vrijednošću i kovarijancom. Postupak se temelji na dvije faze: predikciji i ažuriranju stanja. U fazi predikcije, koristi se model koji na temelju procijenjenog rješenja iz prethodnog koraka $x_{n-1,n-1}$ pretpostavi rješenje za idući korak $x_{n,n-1}$. U fazi ažuriranja, novi rezultati mjerenja d_n se kombiniraju s pretpostavljenim rješenjem modela kako bi se postigla preciznija ažurirana vrijednost rješenja $x_{n,n}$ u trenutnom koraku. Na slici 6. je prikazan jedan korak rješenja takozvanog "forward" problema Kalman filter metodom kroz prikaz ažuriranja funkcije vjerojatnosti varijable x . Ovdje izraz K označava vrijednost Kalmanovog faktora, koji uzima vrijednost između 0 i 1 te stavlja "težinu" ažurirane vrijednosti prema mjerenjima ili pretpostavljenim rješenjima modela na temelju njihove pouzdanosti [6], [41].



Slika 6: Kalman filter metoda: jedan korak ažuriranja rješenja sustava.

Navedena metoda može se koristiti i za rješavanje Bayesovog inverznog problema, pri čemu se na temelju dobivenih mjerenja na konstrukciji traži distribucija parametara modela za koje se ostvaruje ta vrijednost. Postupak se temelji na traženju distribucije vrijednosti parametara z^a , koji odgovara dobivenim mjerenjima d [6], [41]:

$$z^a = z^f + K (d - G(z^f)) = z^f + K(d - u^f), \quad (8)$$

pri čemu z^f predstavlja pretpostavljeno rješenje parametra modela. Kalmanov faktor za inverzni problem je definiran kao [41]–[43]:

$$K = \frac{Cov(z^f, u^f)}{Cov(u^f) + Cov(\epsilon)}, \quad (9)$$

gdje izraz Cov predstavlja vrijednost kovarijance. Prema postavkama Kalman filter metode, varijabla z^a ima Gaussovu

distribuciju, a njezina "posterior" distribucija definirana je srednjom vrijednošću i vrijednosti kovarijance:

$$Cov(z^a) = Cov(z^f) - KCov(z^f, u^f), \quad (10)$$

s čime je "posterior" distribucije traženog parametra z^a s obzirom na mjerenja d u potpunosti definirana.

Međutim, budući da se mnogi inženjerski problemi ne mogu smatrati linearnima, eksplicitni izračun kovarijance iz (10) je nemoguć. Stoga su razvijene mnoge modifikacije Kalman filter metode, kao što je Ansambl Kalman filter za rješavanje nelinearnih problema [6], [39], [41], [42], [44]. Ova metoda temelji se na aproksimaciji varijabli iz jednadžbe (8) i jednadžbe (9) putem Monte Carlo metode, generirajući ansambl uzoraka $z_{i,i=1,\dots,N}^f$. Opetovanim ažuriranjem vrijednosti kovarijanci i novih vrijednosti svakog uzorka ansambla z_i^a , se ostvaruje aproksimaciju srednje vrijednosti i kovarijance tražene "posterior" distribucije parametra z^a .

S obzirom na to da obe metode temelje svoj pristup na rješavanju sustava za brojne, često i tisuće uzoraka, ključna prepreka leži u ostvarivanju računalne efikasnosti. Ovaj izazov posebno dolazi do izražaja kod zahtjevnih problema kao što je simulacija nastajanja i propagiranja pukotina, budući da takvi problemi zahtijevaju primjenu kompleksnih modela, što rezultira dugim vremenskim trajanjem analize.

2.2.3 Surogat modeli

Identifikacija parametara u okviru složenih numeričkih modela i analiza njihove nepouzdanosti obično zahtijeva velik broj proračuna, osobito za nelinearne probleme. Kako bi se postigla brza i učinkovita analiza, često je potrebno razviti matematičke surogat modele. Ovi matematički modeli aproksimacije rješenja zahtijevaju znatno manje kompjuterskih resurse od tradicionalnih numeričkih modela, što značajno ubrzava sami proces provedbe identifikacije [45].

Kod izrade surogat modela, nije nužno razumjeti sve unutarnje detalje procesa računanja modela. Surogat model se konstruira isključivo na temelju ulaznih i izlaznih podataka modela, što se često naziva "black-box" pristupom. Drugim riječima, surogat model se gradi na temelju određenog broja zadanih parametara i rješenja numeričkog modela za te parametre, simulirajući rješenja za ostatak distribucije parametara s razumnom preciznošću. Postoji niz različitih metodologija za izradu matematičkih surogat modela, uključujući metodu proširenja polinomskog kaosa (PCE), modeliranje Gaussovog procesa i regresije (GPR), te primjenu neuronskih mreža [46].

Izrada surogat modela primjenom metode proširenja polinomskog kaosa predstavlja pristup u kojem se aproksimacija rješenja numeričkog modela konstruira putem linearne kombinacije odabranih višedimenzionalnih polinoma [6], [47], [48]:

$$\mathbf{Y} \approx \sum_{i \in N} c_i \Psi_i(\mathbf{z}). \quad (11)$$

U jednadžbi (11), varijabla \mathbf{Y} označava izlazno rješenje modela koje se aproksimira, Ψ_i predstavlja odabrane polinome, a c_i su koeficijenti polinoma. Radi matematičke praktičnosti i kako bi se izbjegle nelinearnosti, obično se koriste ortogonalni polinomi prilagođeni "prior" distribuciji ulaznih parametara. Nakon odabira baze ortogonalnih polinoma, provodi se kalibracija modela te izračun koeficijenata polinoma putem generiranih rješenja numeričkog modela za odabrane ulazne parametre. Nakon kalibracije, surogat model se testira na većem skupu rješenja modela radi procjene njegove pouzdanosti i podudaranja s rezultatima numeričkog modela. Pri tome, daljnje povećanje točnosti modela je moguće uz korištenje polinoma višeg stupnja i povećanjem broja odabranih ulaznih parametara prema kojima se koeficijenti polinoma kalibriraju.

Metoda Gaussovog procesa i regresije (GPR) je pristup koji pretpostavlja da vrijednosti rješenja modela \mathbf{Y} slijede Gaussove distribucije i koristi ih za aproksimaciju tih vrijednosti [49]–[51]:

$$\mathbf{Y} \approx GP(\mu(\mathbf{z}), k(\mathbf{z}, \mathbf{z}')). \quad (12)$$

U ovom izrazu, "GP" označava skup normalnih distribucija, $\mu(\mathbf{z})$ predstavlja srednju vrijednost tih distribucija, a $k(\mathbf{z}, \mathbf{z}')$ je funkcija kovarijance, koja se još naziva i kernel funkcijom. Funkcija kovarijance služi za uspostavljanje korelacije između dviju susjednih varijabli. Prilikom njenog definiranja, obično se specificira i broj slobodnih hiperparametara Θ . Ovi hiperparametri omogućuju prilagodbu svojstava funkcije kovarijance kako bi se postiglo bolje podudaranje s dostupnim podacima. Postupak kalibracije metodom Gaussovog procesa i regresije uključuje pretpostavljanje funkcije kovarijance i vrijednosti hiperparametara za odabrani broj rješenja numeričkog modela. Nakon toga, GPR model se provjerava na dodatnim rješenjima numeričkog modela kako bi se procijenila njegova točnost. Ako je potrebno, vrše se daljnje prilagodbe vrijednosti hiperparametara sve dok se ne postigne dovoljna preciznost surogat modela.

Neuronske mreže predstavljaju skup aproksimacijskih algoritama koji obrađuju podatke kroz slojevitou strukturu. Počevši od ulaznog sloja, prolazeći kroz srednje "skrivenne" slojeve i završavajući na izlaznom sloju, svaki sloj sastoji se od više neurona. Ovi neuroni međusobno razmjenjuju vrijednosti, transformiraju ih te ih dalje prosljeđuju sljedećem sloju. Kroz ovakav proces, neuronske mreže omogućavaju aproksimaciju rezultata numeričkih modela \mathbf{Y} transformacijama ulaznih podataka kroz srednje slojeve sve do izlaznog sloja [40], [52], [53]:

$$\mathbf{Y} \approx \sigma(\mathbf{W}^{(n)} \cdot \sigma(\mathbf{W}^{(n-1)} \cdot \dots \cdot \sigma(\mathbf{W}^{(2)} \cdot \sigma(\mathbf{W}^{(1)} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{b}^{(1)}) + \mathbf{b}^{(2)}) \dots) + \mathbf{b}^{(n)}). \quad (13)$$

U jednadžbi (13), simbol σ označava aktivacijsku funkciju za obradu vrijednosti sloja mreže, matrica $\mathbf{W}^{(i)}$ predstavlja težine slojeva neuronske mreže, vektor $\mathbf{b}^{(i)}$ predstavlja vrijednost pristranosti slojeva, a \mathbf{z} označava ulazne podatke. Svaki neuron u sloju posjeduje svoje specifične vrijednosti težine \mathbf{W} i pristranosti \mathbf{b} , koje oblikuju primljene vrijednosti. Proces kalibracije, poznat i kao "treniranje" neuronske mreže, temelji se na usporedbi rezultata dobivenih mrežom s rezultatima numeričkog modela. Tijekom ovog procesa, prilagođavaju se parametri težina i pristranosti neuronske mreže kako bi se smanjila greška i postigla prihvatljiva razina preciznosti u usporedbi s referentnim modelom.

3 Smjernice i izazovi budućeg istraživanja

Napredak u računalima, snazi procesora i kapacitetu pohrane podataka postupno omogućava razvoj i primjenu složenih numeričkih modela u sve širem kontekstu građevinske industrije. Osim toga, stvara prilike za integraciju građevinskih metodologija s naprednim stohastičkim metodama identifikacije koje putem analize velikih količina podataka precizno identificiraju tražene parametre. Ova disertacija istražuje upravo ta dva aspekta.

Prvi dio disertacije usmjeren je na razvoj učinkovitog numeričkog modela sposobnog simulirati ponašanje kvazi-krhkih materijala na makro i mezostrukturnoj razini. Analizom relevantne literature odabran je kontinuum model konačnih elemenata kao baza, unutar kojeg će se implementirati diskontinuiteti (ED-FEM) s modovima sloma za otvaranje (mod I) i klizanje pukotine (mod II), zajedno s njihovim kombinacijama. Ova integracija omogućava stvaranje efikasnog i robusnog elementa čiji rezultati simulacija pukotina neće biti osjetljivi na odabranu veličinu mreže konačnih elemenata. Cilj je razviti i implementirati kriterije pucanja materijala na razini konačnih elemenata u vlaku, tlaku i posmiku, koji se temelje samo

na stanju naprežanja u svakom pojedinačnom elementu. Ovakvi kriteriji će omogućiti izbjegavanje korištenja algoritama nukleacije i praćenja pukotina koji bitno utječu na same procese nastajanja i propagacije pukotina. Na takav način će se osigurati precizno simuliranje nastajanja makropukotina na makro razini, te također simuliranje utjecaja i međusobnih interakcija konstituenata na mezostrukтури te njihovo pucanje i propagaciju pukotina.

Nakon razvoja modela, isti će poslužiti u drugom dijelu disertacije za razvoj metodologije stohastičke identifikacije elastičnih i lomnih parametara numeričkih modela u kontekstu stvarnih konstrukcija. Budući da svaki numerički model uvijek uključuje određene aproksimacije rješenja te nepouzdanosti pri odabiru ulaznih parametara, ključno je kalibrirati ove modele prema stvarnim konstrukcijama kako bi se postigli točniji i pouzdaniji rezultati. Analizom literature se nameće Bayesova inverzna metoda kao efikasan i opće primjenjiv stohastički pristup identifikaciji i kalibraciji parametara. Ova metoda se temelji na traženju više mogućih rješenja problema putem "posterior" distribucije time obuhvaćajući i prikaz nepouzdanosti dobivenih rješenja. S obzirom na to da oblik i struktura takvih distribucija često nije moguća analitički odrediti, odabrana je Monte Carlo Markov lanac (MCMC) metoda kao metoda aproksimacije rješenja. MCMC se pokazala kao robusna i široko primjenjiva metoda sposobna rješavati nelinearne i kompleksne probleme. Međutim, njena uspješna aproksimacija "posterior" distribucije često zahtjeva provođenje znatnog broja simulacija numeričkih modela, što istiskuje značajno vrijeme i računalne resurse. Stoga je nužno razviti i matematičke surogat modele temeljene na metodama polinomskog kaosa ili neuralnim mrežama. Ti surogat modeli će, s dovoljnom preciznošću, aproksimirati rješenja numeričkog modela u kratkom vremenskom periodu te na takav način omogućiti brzo i efikasne izračune. Izazov ovog dijela istraživanja je utvrđivanje vrste destruktivnih i nedestruktivnih mjerenja preko kojih je moguće identificirati tražene parametre koristeći navedene statističke metode kako bi se omogućila precizna identifikacija parametara numeričkih modela za stvarne konstrukcije.

Zahvala

Istraživanje je financirano sredstvima Hrvatske zaklade za znanost u okviru projekta „Metodologija za procjenu parametara u problemima propagacije pukotina nastalih pod utjecajem ekstremnih mehaničkih opterećenja“, UIP-2020-02-6693.

Literatura

- [1] A. Ibrahimbegovic, „Nonlinear Solid Mechanics,” *Solid Mechanics and its Applications*, sv. 160, 2009-01. DOI: [10.1007/978-90-481-2331-5_1](https://doi.org/10.1007/978-90-481-2331-5_1).
- [2] A. Lisjak i G. Grasselli, „A review of discrete modeling techniques for fracturing processes in discontinuous rock masses,” *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, sv. 6, br. 4, str. 301–314, 2014, ISSN: 1674-7755. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2013.12.007>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1674775514000213>.
- [3] M. Nikolic, E. Karavelić, A. Ibrahimbegovic i P. Mišević, „Lattice Element Models and Their Peculiarities,” *Archives of Computational Methods in Engineering*, sv. 25, 2018-07. DOI: [10.1007/s11831-017-9210-y](https://doi.org/10.1007/s11831-017-9210-y).

- [4] F. Landi, F. Marsili, N. Friedman i P. Croce, „gPCE-Based Stochastic Inverse Methods: A Benchmark Study from a Civil Engineer’s Perspective,” *Infrastructures*, sv. 6, br. 11, 2021, issn: 2412-3811. doi: [10.3390/infrastructures6110158](https://doi.org/10.3390/infrastructures6110158). adresa: <https://www.mdpi.com/2412-3811/6/11/158>.
- [5] Y. Huang, C. Shao, B. Wu, J. L. Beck i H. Li, „State-of-the-art review on Bayesian inference in structural system identification and damage assessment,” *Advances in Structural Engineering*, sv. 22, br. 6, str. 1329–1351, 2019. doi: [10.1177/1369433218811540](https://doi.org/10.1177/1369433218811540). eprint: <https://doi.org/10.1177/1369433218811540>. adresa: <https://doi.org/10.1177/1369433218811540>.
- [6] D. Xiu, *Numerical Methods for Stochastic Computations: A Spectral Method Approach*. Princeton University Press, 2010, ISBN: 9780691142128. adresa: <http://www.jstor.org/stable/j.ctv7h0skv>.
- [7] Z. K. Holm Altenbach Michael Brüning, „Plasticity, Damage and Fracture in Advanced Materials,” 2019-12. doi: [10.1007/978-3-030-34851-9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-34851-9).
- [8] E. Karavelić, M. Nikolić, A. Ibrahimbegovic i A. Kurtović, „Concrete meso-scale model with full set of 3D failure modes with random distribution of aggregate and cement phase. Part I: Formulation and numerical implementation,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, sv. 344, 2019, issn: 0045-7825. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.09.013>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782517306448>.
- [9] R. Zhou, Z. Song i Y. Lu, „3D mesoscale finite element modelling of concrete,” *Computers & Structures*, sv. 192, 2017, issn: 0045-7949. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.07.009>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794917306466>.
- [10] P. Grassl, „3D lattice meso-scale modelling of the effect of lateral compression on tensile fracture processes in concrete,” *International Journal of Solids and Structures*, sv. 262-263, 2023, issn: 0020-7683. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.112086>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002076832200539X>.
- [11] C. Du, W. Huang, M. Ghaemian, S. Jiang i Z. Zhao, „New nonlocal multiscale damage model for modelling damage and cracking in quasi-brittle materials,” *Engineering Fracture Mechanics*, sv. 277, 2023, issn: 0013-7944. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2022.108927>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794422006452>.
- [12] Z. Qian, E. Schlangen, G. Ye i K. Breugel, „Modeling Framework for Fracture in Multiscale Cement-Based Material Structures,” *Materials*, sv. 10, 2017-05. doi: [10.3390/ma10060587](https://doi.org/10.3390/ma10060587).
- [13] J. Dujc, B. Brank i A. Ibrahimbegovic, „Quadrilateral finite element with embedded strong discontinuity for failure analysis of solids,” *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, sv. 69, 2010-01. doi: [10.3970/cmesci.2010.069.223](https://doi.org/10.3970/cmesci.2010.069.223).
- [14] A. Stanić, B. Brank, A. Ibrahimbegovic i H. Matthies, „Crack propagation simulation without crack tracking algorithm: Embedded discontinuity formulation with incompatible modes,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, sv. 386, 2021, issn: 0045-7825. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114090>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782521004217>.

- [15] A. Stanić, B. Brank i D. Brancherie, „Fracture of quasi-brittle solids by continuum and discrete-crack damage models and embedded discontinuity formulation,” *Engineering Fracture Mechanics*, sv. 227, 2020, issn: 0013-7944. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106924>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794419311634>.
- [16] H. Smoljanović, Ž. Nikolić i N. Živaljić, „A combined finite–discrete numerical model for analysis of masonry structures,” *Engineering Fracture Mechanics*, sv. 136, 2015, issn: 0013-7944. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.02.006>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794415000454>.
- [17] M. Gimenes, E. A. Rodrigues, L. A. Bitencourt i O. L. Manzoli, „2D mesoscale modeling of compressive fracture in concrete using a mesh fragmentation technique,” *International Journal of Solids and Structures*, sv. 260-261, 2023, issn: 0020-7683. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.112031>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002076832200484X>.
- [18] J. Čarija, M. Nikolić, A. Ibrahimbegovic i Ž. Nikolić, „Discrete softening-damage model for fracture process representation with embedded strong discontinuities,” *Engineering Fracture Mechanics*, sv. 236, 2020, issn: 0013-7944. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107211>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794420307943>.
- [19] S.-M. Kim i R. K. Abu Al-Rub, „Meso-scale computational modeling of the plastic-damage response of cementitious composites,” *Cement and Concrete Research*, sv. 41, 2011, issn: 0008-8846. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2010.12.002>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0008884610002759>.
- [20] M. Nikolić, T. roje-Bonacci i A. Ibrahimbegovic, „Overview of the numerical methods for the modelling of rock mechanics problems,” *Tehnicki Vjesnik-technical Gazette*, sv. 23, str. 627–637, 2016. adresa: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:11755905>.
- [21] G. D. Nguyen, A. M. Korsunsky i I. Einav, „A constitutive modelling framework featuring two scales of behaviour: Fundamentals and applications to quasi-brittle failure,” *Engineering Fracture Mechanics*, sv. 115, str. 221–240, 2014, issn: 0013-7944. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2013.11.006>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794413003603>.
- [22] T. T. Nguyen, J. Yvonnet, M. Bornert i C. Chateau, „6 - Modeling of Complex Microcracking in Quasi-Brittle Materials: Numerical Methods and Experimental Validations,” *Advances in Multi-Physics and Multi-Scale Couplings in Geo-Environmental Mechanics*, F. Nicot i O. Millet, ur., Elsevier, 2018, str. 171–204, isbn: 978-1-78548-278-6. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-1-78548-278-6.50006-2>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781785482786500062>.
- [23] L. F. Friedrich, I. Iturrioz, A. B. Colpo i S. Vantadori, „FRACTURE FAILURE OF QUASI-BRITTLE MATERIALS BY A NOVEL PERIDYNAMIC MODEL,” *Composite Structures*, str. 117 402, 2023, issn: 0263-8223. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117402>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822323007481>.

- [24] J. Oliver, A. Huespe i P. Sánchez, „A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs X-FEM,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, sv. 195, 2006, John H. Argyris Memorial Issue. Part I, ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.09.020>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782505005049>.
- [25] N. Moës i T. Belytschko, „Extended finite element method for cohesive crack growth,” *Engineering Fracture Mechanics*, sv. 69, 2002, ISSN: 0013-7944. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00128-X](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00128-X). adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001379440100128X>.
- [26] C. Linder i F. Armero, „Finite elements with embedded strong discontinuities for the modeling of failure in solids,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, sv. 72, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.2042>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.2042>. adresa: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2042>.
- [27] Y. Zhang, R. Lackner, M. Zeiml i H. A. Mang, „Strong discontinuity embedded approach with standard SOS formulation: Element formulation, energy-based crack-tracking strategy, and validations,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, sv. 287, 2015, ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.02.001>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782515000390>.
- [28] M. Nikolic, A. Ibrahimbegovic i P. Miscevic, „Brittle and ductile failure of rocks: Embedded discontinuity approach for representing mode I and mode II failure mechanisms: BRITTLE AND DUCTILE FAILURE OF ROCKS,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, sv. 102, 2015-05. DOI: [10.1002/nme.4866](https://doi.org/10.1002/nme.4866).
- [29] Z. Rizvi, M. Nikolic i F. Wuttke, „Lattice element method for simulations of failure in bio-cemented sands,” *Granular Matter*, sv. 21, 2019-02. DOI: [10.1007/s10035-019-0878-6](https://doi.org/10.1007/s10035-019-0878-6).
- [30] M. Nikolic i A. Ibrahimbegovic, „Rock mechanics model capable of representing initial heterogeneities and full set of 3D failure mechanisms,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, sv. 290, str. 209–227, 2015, ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.02.024>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782515000778>.
- [31] H. Smoljanović, Ž. Nikolić i N. Živaljić, „A combined finite–discrete numerical model for analysis of masonry structures,” *Engineering Fracture Mechanics*, sv. 136, str. 1–14, 2015, ISSN: 0013-7944. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.02.006>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794415000454>.
- [32] M. Šodan, „Analysis of Masonry Structure by Combined Finite and Discrete Element Method - FDEM : Master’s Thesis,” 2021-07.
- [33] G. Pijaudier-Cabot i Z. Bazant, „Nonlocal Damage Theory,” *Journal of Engineering Mechanics-asce - J ENG MECH-ASCE*, sv. 113, 1987-10. DOI: [10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1987\)113:10\(1512\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:10(1512)).
- [34] B. V. Rosić, A. Kučerová, J. Sýkora, O. Pajonk, A. Litvinenko i H. G. Matthies, „Parameter identification in a probabilistic setting,” *Engineering Structures*, sv. 50, str. 179–196, 2013, Engineering Structures: Modelling and Computations (special issue IASS-IACM 2012), ISSN: 0141-0296. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.12.029>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029612006426>.

- [35] N. Noii, A. Khodadadian i T. Wick, „Bayesian inversion for anisotropic hydraulic phase-field fracture,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, sv. 386, str. 114–118, 2021, ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114118>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782521004497>.
- [36] H. G. Matthies, E. Zander, B. V. Rosić, A. Litvinenko i O. Pajonk, „Inverse Problems in a Bayesian Setting,” *Computational Methods for Solids and Fluids: Multiscale Analysis, Probability Aspects and Model Reduction*, A. Ibrahimbegovic, ur. Cham: Springer International Publishing, 2016, str. 245–286, ISBN: 978-3-319-27996-1. DOI: [10.1007/978-3-319-27996-1_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-27996-1_10). adresa: https://doi.org/10.1007/978-3-319-27996-1_10.
- [37] F. Marsili, N. Friedman, P. Croce, P. Formichi i F. Landi, „On Bayesian Identification Methods for the Analysis of Existing Structures,” 2016-09. DOI: [10.2749/stockholm.2016.0116](https://doi.org/10.2749/stockholm.2016.0116).
- [38] N. Tang, *Bayesian Inference on Complicated Data*. Rijeka: IntechOpen, 2020-07, ISBN: 978-1-83880-386-5. DOI: [10.5772/intechopen.83214](https://doi.org/10.5772/intechopen.83214). adresa: <https://doi.org/10.5772/intechopen.83214>.
- [39] A. Lye, A. Cicirello i E. Patelli, „Sampling methods for solving Bayesian model updating problems: A tutorial,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, sv. 159, str. 107–160, 2021, ISSN: 0888-3270. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2021.107760>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327021001552>.
- [40] I. Goodfellow, Y. Bengio i A. Courville, *Deep Learning*. MIT Press, 2016, <http://www.deeplearningbook.org>.
- [41] B. Ristic, S. Arulampalam i N. J. Gordon, „Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications,” 2004. adresa: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:60500010>.
- [42] G. Evensen, *Data Assimilation: The Ensemble Kalman Filter*. Springer Berlin, Heidelberg, 2014, ISBN: 9783642424762. adresa: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03711-5>.
- [43] O. G. Ernst, B. Sprungk i H.-J. Starkloff, „Bayesian Inverse Problems and Kalman Filters,” *Extraction of Quantifiable Information from Complex Systems*, S. Dahlke, W. Dahmen, M. Griebel i dr., ur. Cham: Springer International Publishing, 2014, str. 133–159, ISBN: 978-3-319-08159-5. DOI: [10.1007/978-3-319-08159-5_7](https://doi.org/10.1007/978-3-319-08159-5_7). adresa: https://doi.org/10.1007/978-3-319-08159-5_7.
- [44] O. G. Ernst, B. Sprungk i H.-J. Starkloff, „Bayesian Inverse Problems and Kalman Filters,” *Extraction of Quantifiable Information from Complex Systems*, S. Dahlke, W. Dahmen, M. Griebel i dr., ur. Cham: Springer International Publishing, 2014, str. 133–159, ISBN: 978-3-319-08159-5. DOI: [10.1007/978-3-319-08159-5_7](https://doi.org/10.1007/978-3-319-08159-5_7). adresa: https://doi.org/10.1007/978-3-319-08159-5_7.
- [45] M. K. Ramancha, M. A. Vega, J. P. Conte, M. D. Todd i Z. Hu, „Bayesian model updating with finite element vs surrogate models: Application to a miter gate structural system,” *Engineering Structures*, sv. 272, str. 114–191, 2022, ISSN: 0141-0296. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114901>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029622009798>.
- [46] P. F. Shustin, S. Ubaru, V. Kalantzis, L. Horesh i H. Avron, *PCENet: High Dimensional Surrogate Modeling for Learning Uncertainty*, 2022. arXiv: [2202.05063 \[cs.LG\]](https://arxiv.org/abs/2202.05063).

- [47] C. Soize i R. Ghanem, „Physical Systems with Random Uncertainties: Chaos Representations with Arbitrary Probability Measure,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, sv. 26, br. 2, str. 395–410, 2004. DOI: [10.1137/S1064827503424505](https://doi.org/10.1137/S1064827503424505). eprint: <https://doi.org/10.1137/S1064827503424505>. adresa: <https://doi.org/10.1137/S1064827503424505>.
- [48] N. Sanzida i Z. K. Nagy, „Polynomial Chaos Expansion (PCE) Based Surrogate Modeling and Optimization for Batch Crystallization Processes,” *24th European Symposium on Computer Aided Process Engineering*, serija Computer Aided Chemical Engineering, J. J. Klemeš, P. S. Varbanov i P. Y. Liew, ur., sv. 33, Elsevier, 2014, str. 565–570. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-63456-6.50095-8>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780444634566500958>.
- [49] C. E. Rasmussen, „Gaussian Processes in Machine Learning,” *Advanced Lectures on Machine Learning: ML Summer Schools 2003, Canberra, Australia, February 2 - 14, 2003, Tübingen, Germany, August 4 - 16, 2003, Revised Lectures*, O. Bousquet, U. von Luxburg i G. Rätsch, ur. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004, str. 63–71, ISBN: 978-3-540-28650-9. DOI: [10.1007/978-3-540-28650-9_4](https://doi.org/10.1007/978-3-540-28650-9_4). adresa: https://doi.org/10.1007/978-3-540-28650-9_4.
- [50] Y. Yang, Y. Yang, M. Xiao, M. Wan i W. Zhang, „A Gaussian process regression-based surrogate model of the varying workpiece dynamics for chatter prediction in milling of thin-walled structures,” *International Journal of Mechanical System Dynamics*, sv. 2, br. 1, str. 117–130, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1002/msd2.12034>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/msd2.12034>. adresa: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/msd2.12034>.
- [51] D. Williams, I. S. Heng, J. Gair, J. A. Clark i B. Khamesra, „Precessing numerical relativity waveform surrogate model for binary black holes: A Gaussian process regression approach,” *Phys. Rev. D*, sv. 101, str. 063 011, 6 2020-03. DOI: [10.1103/PhysRevD.101.063011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.063011). adresa: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.063011>.
- [52] R. K. Tripathy i I. Bilonis, „Deep UQ: Learning deep neural network surrogate models for high dimensional uncertainty quantification,” *Journal of Computational Physics*, sv. 375, str. 565–588, 2018, ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.08.036>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999118305655>.
- [53] M. Abdar, F. Pourpanah, S. Hussain i dr., „A review of uncertainty quantification in deep learning: Techniques, applications and challenges,” *Information Fusion*, sv. 76, str. 243–297, 2021, ISSN: 1566-2535. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.inffus.2021.05.008>. adresa: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1566253521001081>.